Formeln Systheo

Zeitbereich:

Systemeigenschaften:
- gedächtnislos: $y(t) = f(x(t))$
- linear: $T(\sum c_i x_i) = \sum c_i y_i$
- zeitvariant: $T(x(t-\tau)) = y(t-\tau)$
- kausal: $y \not\leftarrow f(x(\tau)),\ \tau > 0$

Stabilität: (BIBO)
- $|x| < \infty \rightarrow |y(t)| < \infty \ \forall x, t$
- $\int_{\mathbb{R}} |h(t)| dt < \infty$
- $Re\{p_i\} \{ \begin{smallmatrix} < \\ > \end{smallmatrix} \} 0$ für $\{ \begin{smallmatrix} \text{kausale} \\ \text{antikausale} \end{smallmatrix} \}$ Systeme
- $KB\{H(p)\} \ni j\omega$-Achse

LTI-Systeme:
gedächtnislos: $h(t) = c \cdot \delta(t)$
$a(t) = c \cdot u(t)$

Faltung: $(x * h)(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) h(t-\tau)$
- kommutativ $(h * x = x * h)$
- assoziativ $((x * h_1) * h_2 = x * (h_1 * h_2))$
- distributiv $(x * h_1) + (x * h_2) = x * (h_1 + h_2)$

DGl's

$\alpha(D) \cdot y(t) = \beta(D) \cdot x(t)$

Lösen: (i) homogene Dgl: $\alpha(p_i) = 0$

$$y_h(t) = \begin{cases} c_1 e^{p_1 t} + \dots & \text{einf. Wurzeln} \\ (c_1 + c_2 t + \dots + c_m t^{m-1}) e^{q_i t} & \dots \text{m-fache Nst.} \end{cases}$$

(ii) part. Lsg: $x(t) = A \cdot e^{qt},\ t \geq 0$

$\alpha(q) \neq 0 \rightarrow y_s = A \frac{\beta(q)}{\alpha(q)} e^{qt},\ t \geq 0$

$= 0 \rightarrow y_s = A \frac{\beta(q)}{\alpha^{(m)}(q)} t^m e^{qt},\ t \geq 0$

$\rightarrow y = y_h + y_s$

Zeitinvariant: $\int_{-\infty}^{t} x(\tau) \dots$

$F_{gr} = 2 \cdot \int_0^\infty x(t) \cos(\omega t)\, dt$

$F_{ui} = -2j \cdot \int_0^\infty x(t) \sin(\omega t)\, dt$

$f_{gr} = 2 \cdot \int_0^\infty F_{gr} \cdot \cos(\omega t)\, d\omega \ \frac{1}{2\pi}$

Frequ.-Bereich

Fourier-Trafo:

$X(j\omega) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-j\omega t} dt$ (Ex: $\int_{\mathbb{R}} |x(t)| dt < \infty$
endl. viele Extrema (Unstetigkeiten))

$f_{gr} + j f_{gi} + f_{ur} + j f_{ui}$
$\downarrow \quad \downarrow \quad \times$
$F_{gr} + j F_{gi} + F_{ur} + j F_{ui}$

Eigenschaften:

$x(-t) \rightarrow X(-j\omega)$	$x(t-t_0) \rightarrow X(j\omega) e^{-j\omega t_0}$
$x^*(t) \rightarrow X^*(-j\omega)$	$e^{j\omega_0 t} x(t) \rightarrow X(j\omega - j\omega_0)$
$X(jt) \rightarrow 2\pi x(-\omega)$	$x(a \cdot t) \rightarrow \frac{1}{\lvert a\rvert} X(j\frac{\omega}{a})$
$\sum c_i x_i \rightarrow \sum c_i X_i(j\omega)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} x(\frac{t}{a}) \rightarrow X(ja\omega)$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau \rightarrow \frac{1}{j\omega} X(j\omega)$ (für $x(0) = 0$)	$\frac{\partial^n}{\partial t^n} x(t) \rightarrow (j\omega)^n X(j\omega)$
$(-jt)^n x(t) \rightarrow \frac{\partial^n X(j\omega)}{\partial \omega^n}$	$\int_{\mathbb{R}} t^n x(t) dt = j^n \frac{\partial^n X}{\partial \omega^n}\Big\vert_{\omega=0}$
	$\int_{\mathbb{R}} \omega^n X(j\omega) d\omega = \frac{1}{j^n} \frac{\partial x}{\partial t^n}\Big\vert_{t=0}$
$x_1 * x_2 \rightarrow X_1 \cdot X_2$	
$2\pi x_1 \cdot x_2 \rightarrow X_1 * X_2$	$\int_{\mathbb{R}} x_1(t) x_2^*(t) = \int_{\mathbb{R}} X_1 \cdot X_2^* \frac{d\omega}{2\pi}$

Energie:

$E = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt$
$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |X(j\omega)| d\omega$

Zeitdauer + Bandbreite: (i) $T = \frac{X(0)}{x(0)}$

$B = 2\pi \cdot \frac{x(0)}{X(0)}$

$B \cdot T = 2\pi$ (aber: nur für $x(t) \geq 0$, $X(j\omega) \geq 0$ sinnvoll)

(ii) $T = \sqrt{\frac{1}{E} \int_{\mathbb{R}} t^2 |x(t)|^2 dt}$

$B = \sqrt{\frac{1}{E} \int \omega^2 |X(j\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}}$

Unschärferelation

$B\, T \geq \frac{1}{2}$ ("=" für Gauß-Glocke)

Period. Signale: $x(t) = x(t+T) \rightarrow x(t) = \sum_k X_k e^{jk\Omega t}$ mit $X_k = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) e^{-jk\Omega t}$, $\Omega = \frac{2\pi}{T}$

$\rightarrow X(j\omega) = 2\pi \sum_k X_k \delta(\omega - k\Omega)$

Frequ.-Gang

$H(j\omega) = \mathcal{F}(h(t)) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = A(\omega) \cdot e^{j\Theta(\omega)}$ ($h(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow$ A gerade, Θ ungerade)

$H(j\omega) = \frac{y(t)}{x(t)}$ wenn $x(t) = e^{j\omega t}$

$\tau_p = -\frac{\Theta(\omega)}{\omega}$

$\tau_g = -\frac{d\Theta(\omega)}{d\omega}$ (linearphasige LTI: $\Theta(\omega) = -(\omega t_0 + \Theta_0)$)

2 Interpretationen:

*) $H(j\omega) = \frac{y(t)}{x(t)}$ falls $x(t) = e^{j\omega t}$

*) falls $x(t+T) = x(t)$:

$y(t+T) = y(t) = \sum_k x_k H(jk\Omega) e^{jk\Omega t}$

bei $\alpha y = \beta x$ gilt: $a(t) = \left[\sum_{i=1}^{N} c_i e^{p_i t} + \frac{\beta(0)}{\alpha(0)}\right] u(t)$

$h(t) = \frac{\partial}{\partial t} a(t) = \left[\sum_{i=1}^{N} c_i + \frac{\beta(0)}{\alpha(0)}\right] \delta(t) + \sum c_i p_i e^{p_i t} u(t)$

Abtasttheorem:

Abtastung: reale Abtastung: $\tilde{x}(t) = T \cdot \sum_n x(nT) g(t-nT)$ mit T ... Abtastintervall, $\Rightarrow F = \frac{1}{T}$ ... Frequ., $\Omega = 2\pi F$ ..., $g(t)$ ... Abtast-Impuls

Rekonstruktion möglich wenn $G(j\omega) \neq 0 \;\forall |\omega| < \frac{\Omega}{2}$

ideale Abtastung: $g(t) \to \delta(t)$

$\Rightarrow \tilde{x}(t) = x(t) \cdot T \sum \delta(t-nT)$

Fourier-Reihe: $T \cdot \sum_n \delta(t-nT) \doteq \sum_k c_k e^{jk\Omega t} \to c_k = 1$

$\tilde{X}(j\omega) = \sum_k X(j\omega - jk\Omega)$

Abtasttheorem: $\Omega \geq 2\omega_g$, wobei für $|\omega| \leq \omega_c$ gilt: $|X(e^{j\omega})| = 0$

Komplexe Ebene

Laplace-Trafo:

Zweiseitig: $X(p) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-pt} dt$, $p = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ $x(t) = \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} \frac{1}{2\pi j} X(p) e^{pt} dp$

$X(j\omega) = X(p)|_{p=j\omega}$ wenn $j\omega$-Achse $\in$ KB

Einseitig: $X^+(p) = \int_0^\infty x(t) e^{-pt} dt \Leftrightarrow x(t) \cdot u(t) = \ldots$

R.B.: $\mathcal{L}^+(x'''(t)) = p^3 X^+(p) - p^2 x(0) - p\dot{x}'(0) - x''(0)$

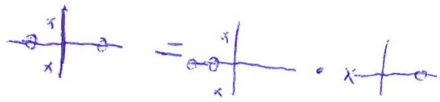
Übertragungsfkt: $X(p) = \mathcal{L}(h(t)) = \frac{Y(p)}{X(p)}$

$x(t)$ kausal $\to h(t)$ kausal $\Rightarrow H(p) = H^+(p) \to H(e^{j\omega}) = H(p)|_{p=j\omega}$

Minimalphasiges System: *) $H(p)$: kausal, stabil $\Rightarrow \mathrm{Re}\{p_i\} < 0$

*) minimalphasig: $\mathrm{Re}\{n_i\} < 0 \;\forall i$ $\to$ inverses System

*) max. ~ : $\gamma \;\; \geq 0 \;\; \forall i$



$H(p) = H_{min} \cdot H_{all} = \tilde{H} \cdot \pi(p + n_i^*) \cdot \frac{\pi(p - n_i)}{\pi(p + n_i^*)}$

*) bei M Nst. $\notin j\omega$-Achse $\exists\; 2^M$ versch. LTI-Systeme (1x minphasig, 1x maxphasig)

Zustandsraum

Systeme mit mehreren In-/Outputs: $\underline{h}(t) = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1r} \\ \vdots & & \\ h_{q1} & \cdots & h_{qr} \end{bmatrix} = [\underline{h}_1 \cdots \underline{h}_r]$ mit $\underline{h}_j = T(\delta(t) \cdot \underline{e}_j)$

$\underline{y}(t) = (\underline{h} * \underline{x})(t)$ $[\neq x * h]$

$\underline{H}(p) = L(\underline{h}(t))$

Zustandsvariablen / Zustandsraum:

$\underline{z}'(t) = \underline{A} \cdot z(t) + \underline{B} \cdot x(t)$

$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot z(t) + \underline{D} \cdot x(t)$

$\xrightarrow[\text{Trafo}]{\text{lin.}}$ $\tilde{\underline{z}}' = \tilde{\underline{A}}\tilde{z} + \tilde{\underline{B}}x$, $\tilde{\underline{y}} = \tilde{\underline{C}}\tilde{z} + \tilde{\underline{D}}x$

$\tilde{A} = V^{-1}AV$, $\tilde{B} = V^{-1}B$, $\tilde{C} = C \cdot V$, $\tilde{D} = D$

Dgl. -> Zustandsraum: z.B. $H(p) = \frac{3p^3 + p^2 - 2p + 1}{p^2 + 2p - 1} = (3p - 5) + \frac{11p - 4}{p^2 + 2p - 1}$ (falls $N \leq M$)

$\to \tilde{y} = y(t) - (3x'(t) - 5x(t))$

$\tilde{y}'' + 2\tilde{y}' - \tilde{y} = 11x' - 4x$

$\det(\lambda E - A)$
$= (-1)^N \det(A - \lambda E)$
$= \alpha(D)$
$\Rightarrow$ EW $\hat{=}$ Nst. von ...
$\hat{=}$ Pole von $H(p)$